Chapitre 5

Réponse - Structure algébriques

5.1 Structures algébriques

Ex. 1

a. Oui, $(\mathbb{N}, +)$ est un magma.
b. Non, l'opération n'est pas fermée sur les naturels $(5 - 7 = -2)$.
c. Oui, $(\mathbb{N}, \times)$ est un magma.
d. Non, l'opération n'est pas fermée sur les naturels $(5/4 \notin \mathbb{N})$.
e. Oui, $(\mathbb{R}, \surd)$ est un magma.
f. Non, il faut associer 2 éléments d'un ensemble (ici on a $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$) à un troisième de ce même ensemble (ici on a $\mathbb{R}$). Ce serait vrai dans les complexes.

Ex. 2

a. $a \star b = c \mod 4$

$\star$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

b. $a \star b = a \operatorname{div} b$.
Impossible, $a \operatorname{div} 0$ n'est pas défini.

c. $a \star b = min(a, b)$

$\star$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	0	1	2	2
3	0	1	2	3

d. $a \star b = c$, où $c = \begin{cases} 1 & \text{si } a \mid b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\star$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	1	0	1	0
3	1	0	0	1

Ex. 3

a. $a \star e = d$
b. $e \star a = b$
c. $a \star d = d$
d. $a \star a = e$
e. $b \star d = c$
f. $b \star e = c$
g. $a \star a \star a = b$
h. $d \star d = b$
i. $d \star d \star d \star d = d$
j. $a \star b \star a \star b = e$
k. $(a \star b) \star c = d$
l. $a \star (b \star c) = d$
m. $(a \star d) \star e = e$
n. $a \star (d \star e) = d$
o. $(a \star b) \star (c \star d) = d$
p. $a \star (b \star c) \star d = d$

Ex. 4

$\star$	0	1
0	0	0
1	0	0

$\star$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\star$	0	1
0	0	0
1	1	1

$\star$	0	1
0	0	1
1	0	1

$\star$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\star$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\star$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\star$	0	1
0	1	1
1	1	1

Ex. 5

a. On peut vérifier que l'opération n'est pas associative avec les couples :
$(a \star a) \star b = b \neq c = a \star (a \star b)$
$(a \star a) \star c = a \neq c = a \star (a \star c)$
$(a \star b) \star a = c \neq a = a \star (b \star a)$
$(a \star b) \star b = a \neq c = a \star (b \star b)$
$(a \star c) \star b = b \neq a = a \star (c \star b)$
$(a \star c) \star c = a \neq c = a \star (c \star c)$
$(b \star a) \star a = b \neq c = b \star (a \star a)$
$(b \star a) \star b = c \neq b = b \star (a \star b)$
$(b \star b) \star b = b \neq c = b \star (b \star b)$
$(b \star b) \star c = a \neq c = b \star (b \star c)$
$(b \star c) \star b = b \neq c = b \star (c \star b)$
$(b \star c) \star c = a \neq b = b \star (c \star c)$
$(c \star a) \star a = c \neq a = c \star (a \star a)$
$(c \star a) \star b = b \neq c = c \star (a \star b)$
$(c \star b) \star b = c \neq a = c \star (b \star b)$
$(c \star b) \star c = c \neq a = c \star (b \star c)$
$(c \star c) \star a = c \neq a = c \star (c \star a)$
$(c \star c) \star b = a \neq b = c \star (c \star b)$

b. On peut vérifier que l'opération n'est pas associative avec les couples :
$(a \star b) \star a = a \neq c = a \star (b \star a)$
$(a \star b) \star b = a \neq c = a \star (b \star b)$
$(a \star b) \star c = c \neq a = a \star (b \star c)$
$(a \star c) \star c = b \neq a = a \star (c \star c)$
$(b \star a) \star c = b \neq a = b \star (a \star c)$
$(b \star b) \star a = c \neq a = b \star (b \star a)$
$(b \star b) \star b = c \neq a = b \star (b \star b)$
$(b \star b) \star c = b \neq c = b \star (b \star c)$
$(c \star b) \star a = c \neq b = c \star (b \star a)$
$(c \star b) \star b = c \neq b = c \star (b \star b)$
$(c \star b) \star c = b \neq c = c \star (b \star c)$
$(c \star c) \star a = c \neq b = c \star (c \star a)$
$(c \star c) \star b = c \neq b = c \star (c \star b)$
$(c \star c) \star c = a \neq c = c \star (c \star c)$

Ex. 6

a. C'est un quasigroupe.
b. C'est un semigroupe et un quasigroupe.
c. C'est un groupe (addition $\mod 3$).
d. Monoïde
e. Magma
f. C'est un quasigroupe.

Ex. 7

Nom	Définition	Associatif	inverse gauche	inverse droite	identité	Type
Multiplication	$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x \star y = x \times y$	X	X	X	1	groupe
Minimum	$\forall x, y \in \mathbb{N}, x \star y = min(x, y)$	X			$\nexists$	demi-groupe
Maximum	$\forall x, y \in \mathbb{N}, x \star y = max(x, y)$	X			0	monoïde
2^{me} composante	$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \star y = y$	X			Neutre à gauche : $\mathbb{R}$	demi-groupe
Soustraction	$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \star y = x - y$		X	X	Neutre à droite : 0	demi-groupe
Union	$\forall A, B \in \mathcal{U}, A \star B = A \cup B$	X			$\varnothing$	monoïde
PPCM	$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, a \star b = ppcm(a, b)$	X			1	monoïde
Multiplication banale	$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \star y = 0$	X			$\nexists$	demi-groupe

Ex. 8

Preuve : (direct)

Supposons que a, b sont inversibles ($\exists a^{-1}, b^{-1} \in E, a \star a^{-1} = e, b \star b^{-1} = e$). L'élément $b^{-1} \star a^{-1}$ existe puisque E est fermé sur $\star$. De plus :

$$\begin{aligned}(a \star b) \star (b^{-1} \star a^{-1}) &= a \star (b \star b^{-1}) \star a^{-1} \\ &= a \star e \star a^{-1} \\ &= (a \star e) \star a^{-1} \\ &= a \star a^{-1} \\ &= e\end{aligned}$$

On peut prouver que $(b^{-1} \star a^{-1}) \star (a \star b) = e$ de manière similaire. Et $b^{-1} \star a^{-1}$ est l'inverse de $a \star b$.
■

5.2 Isomorphisme

Ex. 9

a. Il suffit d'identifier la fonction $f : (A, \star) \to (A, \cdot)$. Il faut que $e_\star = e$. puisque ce sont les identités et $f(0) = 1$. Ensuite, on complète. Ici, les deux fonctions fonctionnent.

On obtient :

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	0

ou

x	$f(x)$
0	1
1	0
2	2

b. On a encore un élément neutre et on remarque un élément « absorbant ». Il faut les associer dans la fonction.

On obtient :

x	$f(x)$
0	1
1	0
2	3
3	2

ou

x	$f(x)$
0	2
1	0
2	3
3	1

Ex. 10

Il faut vérifier que $\forall a, b \in A, f(a \star b) = f(a) \cdot f(b)$. Il y a 25 vérifications.

Dans $(A, \star)$	Dans $(B, \cdot)$
$f(0 \star 0) = f(0) = 1$	$f(0) \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1$
$f(0 \star 1) = f(1) = 0$	$f(0) \cdot f(1) = 1 \cdot 0 = 0$
$f(0 \star 2) = f(0) = 1$	$f(0) \cdot f(2) = 1 \cdot 1 = 1$
$f(0 \star 3) = f(2) = 1$	$f(0) \cdot f(3) = 1 \cdot 2 = 1$
$f(0 \star 4) = f(2) = 1$	$f(0) \cdot f(4) = 1 \cdot 1 = 1$
$f(1 \star 0) = f(1) = 0$	$f(1) \cdot f(0) = 0 \cdot 1 = 0$
$f(1 \star 1) = f(2) = 1$	$f(1) \cdot f(1) = 0 \cdot 0 = 1$
$f(1 \star 2) = f(1) = 0$	$f(1) \cdot f(2) = 0 \cdot 1 = 0$
$f(1 \star 3) = f(3) = 2$	$f(1) \cdot f(3) = 0 \cdot 2 = 2$
$f(1 \star 4) = f(1) = 0$	$f(1) \cdot f(4) = 0 \cdot 1 = 0$
$f(2 \star 0) = f(0) = 1$	$f(2) \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1$
$f(2 \star 1) = f(1) = 0$	$f(2) \cdot f(1) = 1 \cdot 0 = 0$
$f(2 \star 2) = f(2) = 1$	$f(2) \cdot f(2) = 1 \cdot 1 = 1$
$f(2 \star 3) = f(4) = 1$	$f(2) \cdot f(3) = 1 \cdot 2 = 1$
$f(2 \star 4) = f(4) = 1$	$f(2) \cdot f(4) = 1 \cdot 1 = 1$
$f(3 \star 0) = f(3) = 2$	$f(3) \cdot f(0) = 2 \cdot 1 = 2$
$f(3 \star 1) = f(4) = 1$	$f(3) \cdot f(1) = 2 \cdot 0 = 1$
$f(3 \star 2) = f(3) = 2$	$f(3) \cdot f(2) = 2 \cdot 1 = 2$
$f(3 \star 3) = f(0) = 1$	$f(3) \cdot f(3) = 2 \cdot 2 = 1$
$f(3 \star 4) = f(3) = 2$	$f(3) \cdot f(4) = 2 \cdot 1 = 2$
$f(4 \star 0) = f(4) = 1$	$f(4) \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1$
$f(4 \star 1) = f(1) = 0$	$f(4) \cdot f(1) = 1 \cdot 0 = 0$
$f(4 \star 2) = f(4) = 1$	$f(4) \cdot f(2) = 1 \cdot 1 = 1$
$f(4 \star 3) = f(0) = 1$	$f(4) \cdot f(3) = 1 \cdot 2 = 1$
$f(4 \star 4) = f(2) = 1$	$f(4) \cdot f(4) = 1 \cdot 1 = 1$