# Chapitre 4

# Réponse - Relation

Notez : les graphes orientés ont été conçus sur le site de Evan Wallace[1] et les diagrammes de Hasse sur Method Draw Vector Editor[2].

## 4.1 Définition/ représentation

**Ex. 1**

a. Oui, une personne est dans son propre programme.

b. Oui, si $(a, b) \in R$ alors $b$ est dans le même programme que $a$ et $(b, a) \in R$.

c. Non, si $(a, b) \in R, a \neq b$ alors $b$ est dans le même programme que $a$ et $(b, a) \in R$.

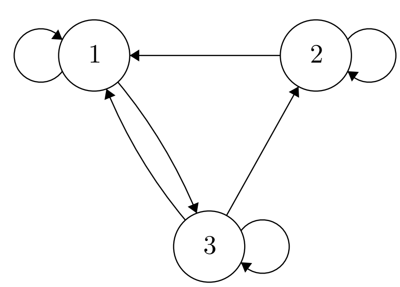
d. Oui, si $a$ est dans le même programme que $b$ et $b$ est dans le même programme de $c$, alors $a$ est dans le même programme que $c$. Notons que dans un autre contexte, il serait possible que $b$ ait « deux programmes » et que $R$ ne soit pas transitive.

**Ex. 2**
Propriétés des relations :

| | réflexive | symétrique | antisymétrique | transitive |
|---|---|---|---|---|
| a. | x | x | | |
| b. | x | | | |
| c. | x | x | | |
| d. | | | x | x |
| e. | | | | |
| f | | | x | x |

**Ex. 3**

a.




1. https ://madebyevan.com/fsm
2. https ://editor.method.ac/

b.

| $A \times A$ | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 0 | 1 |
| **2** | 1 | 1 | 0 |
| **3** | 1 | 1 | 1 |

c. $R$ est réflexive $(1,1) \in R, (2,2) \in R, (3,3) \in R$.
d. $R$ n'est pas irréflexive puisque $(1,1) \in R$.
e. $R$ n'est pas symétrique, en effet $(2,1) \in R$ et $(1,2) \notin R$. Pareil pour $(3,2)$.
f. $R$ n'est pas antisymétrique, en effet $(1,3) \in R$ et $(3,1) \in R$.
g. $R$ n'est pas transitive, en effet $(1,3) \in R, (3,2) \in R$ mais $(1,2) \notin R$.
h. $R$ est connexe $(1,2) \in R, (1,3) \in R, (3,2) \in R$.
i. $R$ n'est pas dense puisque $(3,2) \in R$ et le seul élément qui reste (1) ne peut servir d'intermédiaire, $(1,2) \notin A$.

**Ex. 4**
Propriétés des relations $R_i$ :

a. $R_1$ :
   — Non réflexive, $(2,2) \notin R_1$
   — Symétrique
   — Antisymétrique
   — Transitive

b. $R_2$ :
   — Réflexive
   — Symétrique
   — Non antisymétrique $(1,2) \in R_2 \wedge (2,1) \in R_2$
   — Non transitive $(-1,0) \in R_2 \wedge (0,1) \in R_2 \wedge (-1,1) \notin R_2$

c. $R_3$ :
   — Réflexive
   — Non symétrique $(2,1) \in R_3 \wedge (1,2) \notin R_3$
   — Antisymétrique
   — transitive

d. $R_4$ :
   — Réflexive
   — Symétrique
   — Non antisymétrique $(0,2) \in R_4 \wedge (0,2) \in R_4$
   — Transitive

e. $R_5$ :
   — Réflexive
   — Symétrique
   — Non antisymétrique, $(0,10) \in R_5 \wedge (10,0) \in R_5$
   — Transitive

f. $R_6$ :
   — Non réflexive, $(2,2) \notin R_6$
   — Non symétrique, $(4,2) \in R_6 \wedge (2,4) \notin R_6$
   — Antisymétrique
   — Non transitive $(16,4) \in R_6 \wedge (4,2) \in R_6 \wedge (16,2) \notin R_6$

g. $R_7$ :
   — Non réflexive, $(1,1) \notin R_7$
   — Non symétrique,$(2,1) \in R_7 \wedge (1,2) \notin R_7$
   — Antisymétrique
   — Transitive

h. $R_8$ :
   — Réflexive
   — Non symétrique, $(4,2) \in R_8 \wedge (2,4) \notin R_8$
   — Si $b > 0$ : antisymétrique, sans contraintes : non antisymétrique car $(-2,2) \in R_8 \wedge (2,-2 \in R_8$
   — Transitive

**Ex. 5**

a. $2^{3^2} = 512$
b. $2^{\frac{3^2-3}{2}} = 8$
c. $3^{\frac{3^2-3}{2}} = 27$
d. $2^3 = 8$
e. $3^{\frac{3^2-3}{2}} = 27$
f. $2^{3^2-1} = 2^8 = 256$
g. $2^5 = 32$
h. $2^{\frac{3^2-3}{2}-1+3} = 2^5 = 32$
i. $2^3 3^2 = 72$
j. $2^5 = 32$

**Ex. 6**
Éléments manquants pour les fermetures

| | réflexive | symétrique | transitive |
|---|---|---|---|
| a. | $(b,b)$ | $(b,a),(c,b)$ | $(b,a),(b,b),(c,b)$ |
| b. | $(c,c)$ | $(a,b),(c,b)$ | $(c,c)$ |
| c. | $(b,b),(c,c),(d,d)$ | $(b,a),(c,a),(d,b),(d,c)$ | $(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c),(d,b),(d,c),(d,d)$ |
| d. | $(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)$ | | $(a,a),(a,d),(b,b),(b,c),(d,a),(d,d),(c,b),(c,c)$ |

## 4.2 Relation d'équivalence

**Ex. 7**

a. Relation d'équivalence.
b. Pas symétrique.
c. Relation d'équivalence.
d. Pas transitive, pas symétrique.
e. Pas transitive (probablement pas symétrique).
f. Pas transitif (probablement pas réflexif).

**Ex. 8**

a. Pas transitive.
b. Pas réflexive.
c. Pas symétrique.
d. Relation d'équivalence.
e. Relation d'équivalence.
f. Relation d'équivalence.

**Ex. 9**

a. 7 - a. : $[x_i]_R$ où $x_i$ est un élève de chaque programme.
b. 7 - c. : $[x_i]_R$ où $x_i$ est un élève né le $i^{me}$ jour de l'année, $1 \leq i \leq 366$.
c. 8 - d. : $[a]_R$ (ou $[b]_R$)
d. 8 - e. : $[a]_R$ et $[c]_R$
e. 8 - f. : $[a]_R$, $[b]_R$ et $[c]_R$

**Ex. 10**

a. La relation n'est pas symétrique.
b. La relation n'est pas réflexive.
c. Relation d'équivalence.
d. Relation d'équivalence.

**Ex. 11**

a. $[2]_R$ et $[3]_R$.
b. $[n]_R$, où $n \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.
c. $[n]_R$, où $n = 7k, k \in \mathbb{M}$.
d. $[n]_R$, où $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.

## 4.3 Relations d'ordre

**Ex. 12**

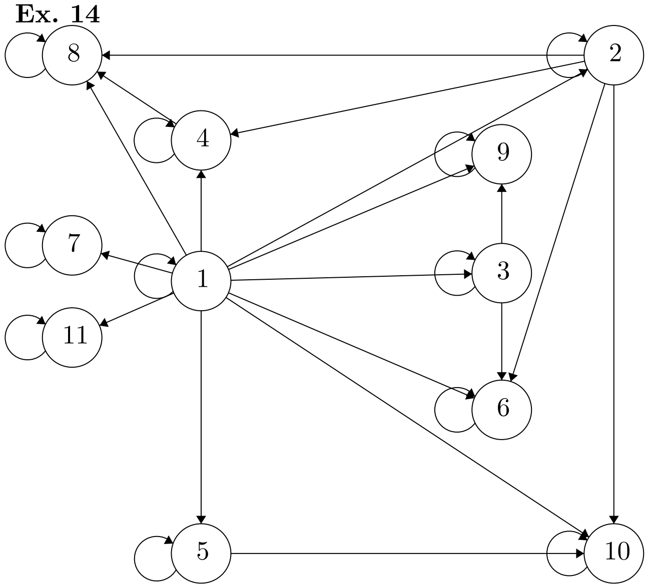
a. Non réflexif.
b. Relation d'ordre total.
c. Ordre partiel.
d. Pas réflexif, pas antisymétrique, pas transitif.
e. Pas réflexif, pas antisymétrique, pas transitif.
f. Relation d'ordre partiel.

**Ex. 13**

a. Relation d'ordre partiel ($a$ et $d$ incomparables).

b. Pas transitif.
c. Relation d'ordre total.
d. Relation ordre partiel ($c$ et $d$ incomparables).

**Ex. 14**




**Ex. 15**

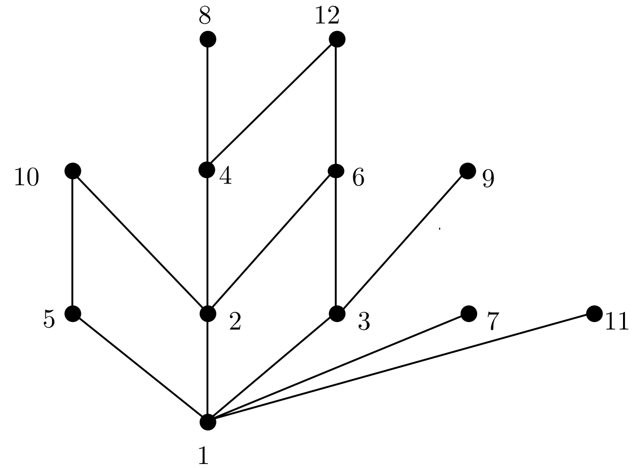
a.

$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),\\ (b,d),(c,c),(c,d),(d,d)\}$$

b.

$$R = \{(a,a),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),\\ (b,d),(c,c),(c,d),(d,d)\}$$

**Ex. 16**




**Ex. 17**

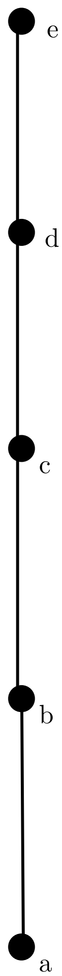
a. $\{a\}$
b. $\{h\}$
c. $h$
d. $a$
e. $\{a\}$
f. $\{g,h\}$
g. $\{a,c\}$
h. $\{h\}$
i. $a$
j. $g$
k. $c$
l. $h$

**Ex. 18**

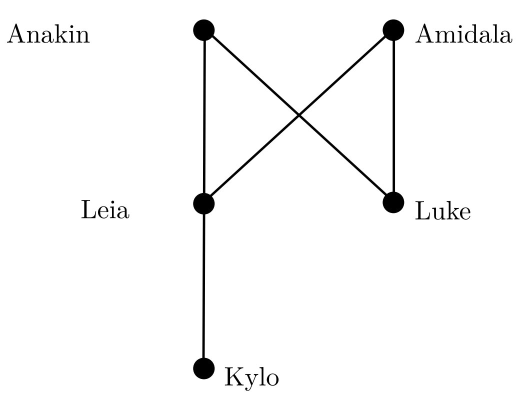
a. $\{a,b,c\}$
b. $\{h,i\}$
c. Aucun
d. Aucun
e. $\{b\}$
f. $\{g,h,i\}$
g. Aucun
h. $\{a,b,c,d,e,f,g\}$
i. $b$
j. $g$
k. $b$
l. $d$

**Ex. 19**

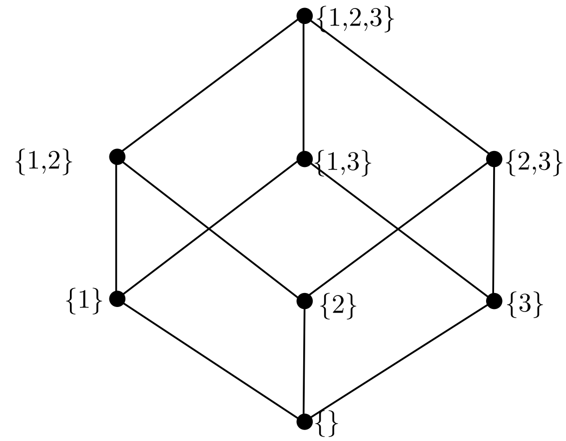
a.


e
d
c
b
a

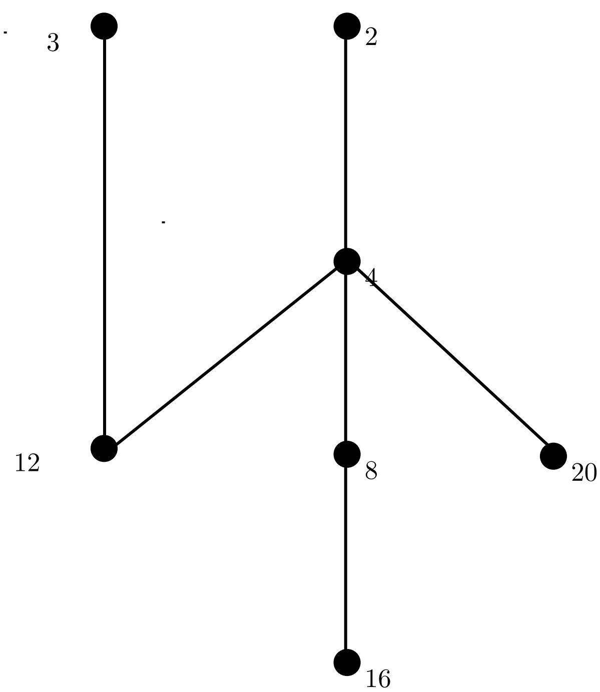
b.


Anakin
Amidala
Leia
Luke
Kylo

c.


{1,2,3}
{1,2}
{1,3}
{2,3}
{1}
{2}
{3}
{}

d.


3
2
4
12
8
20
16