Chapitre 3

Réponse - Ensemble, relation, fonction

3.1 Définitions

Ex. 1

Mots	Extension	Compréhension	intervalle
Les nombres pairs.	$\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$	$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}^*\}$	Pas un intervalle
Les fractions positives ayant 1 pour numérateur.	$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$	$\left\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$	Pas un intervalle
Les entiers de -5 à 5 inclus.	$\{-5, -4, -3, \ldots, 4, 5\}$	$\{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 5\}$	Pas un intervalle
Les nombre entre 0 et 1.	impossible à définir	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$	$]0, 1[$
Nombre premier plus petit que 5.	$\{2, 3\}$	$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2 \vee x = 3\}$	Pas un intervalle

Ex. 2

a. Vrai
b. Faux
c. Faux
d. Faux
e. Vrai
f. Vrai
g. Faux
h. Vrai
i. Vrai
j. Faux
k. Vrai
l. Faux
m. Vrai
n. Faux
o. Faux

Ex. 3

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), \\ &(b,1), (b,2), (b,3), (b,4), \\ &(c,1), (c,2), (c,3), (c,4)\} \end{aligned}$$

Ex. 4

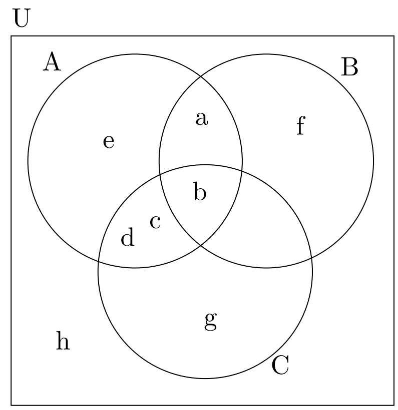
a. $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
b. $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
c. $\{\varnothing, \{a\}\}$
d. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$
e. $\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{a\}\},\ \{\{b\}\},\ \{\{a,b\}\}, \{\varnothing, \{a\}\},\ \{\varnothing, \{b\}\},\ \{\varnothing, \{a,b\}\},$ $\{\{a\}, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a,b\}\},\ \{\{b\}, \{a,b\}\},$ $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}\},\ \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}\},\ \{\varnothing, \{b\}, \{a,b\}\},\ \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\},$ $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}\}$
f. $\{\varnothing\}$

Ex. 5

a. 0
b. 2
c. 3
d. 8
e. 8
f. 1
g. 2
h. ensemble infini
i. ensemble infini
j. 9
k. 24
l. 32

3.2 Opérations sur les ensembles

Ex. 6

a. 

b. $\{a, b, c, d, e, f\}$
c. $\{a, e\}$
d. $\{c, d, e\}$
e. $\{b\}$
f. $\{a, b, c, d, e, f, g\}$
g. $\{a, c, d, e, f, g, h\}$
h. $\{c, d, e, f, g, h\}$
i. $\{c, d, e, f, g, h\}$
j. $\{f\}$

Ex. 7

a. $A \cup B$ est l'ensemble de tous les entiers x qui sont soit pairs, soit multiples de 3 (ou les deux), donc :
$A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k \vee x = 3m, k, m \in \mathbb{Z}\}$.
b. $A \cap B$ est l'ensemble des entiers x qui sont à la fois pairs et multiples de 3. Ces entiers sont des multiples de 6, donc :
$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 6k, k \in \mathbb{Z}\}$.

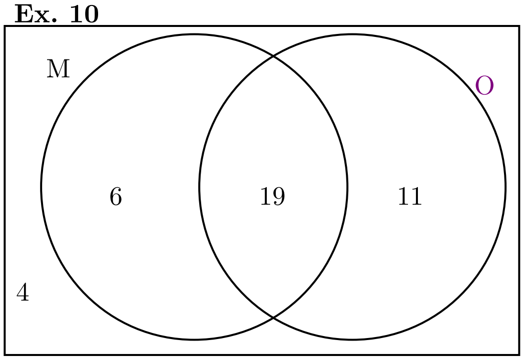
Ex. 8

a. $A \cup B = [0, 10]$.
b. $A \cap B = [3, 5]$.
c. $\overline{A} = -\infty, 0[\cup]5, \infty$
d. $\overline{A \cup B} = \mathbb{R} \setminus [0, 10] = -\infty, 0[\cup]10, \infty$.

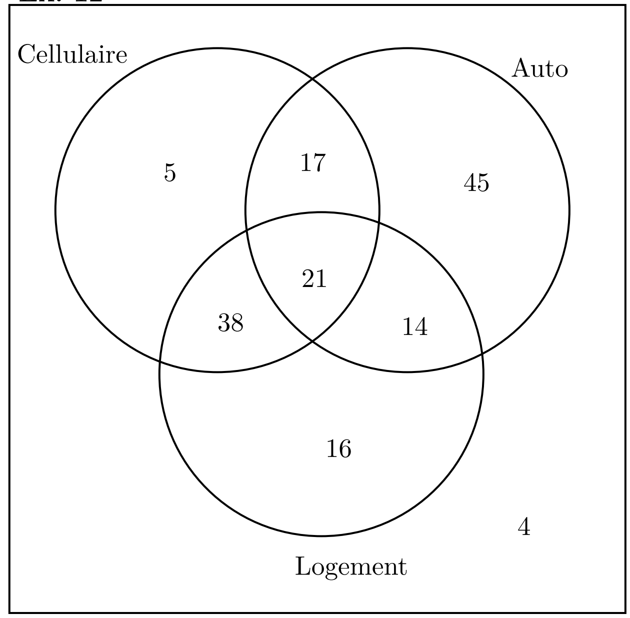
Ex. 9

a. $\overline{A} = -\infty, 1]$ et $\overline{B} =]4, \infty$. Donc, $\overline{A \cup B} = \varnothing$.
b. $\overline{A \cap B} = -\infty, 1] \cup]4, \infty)$.

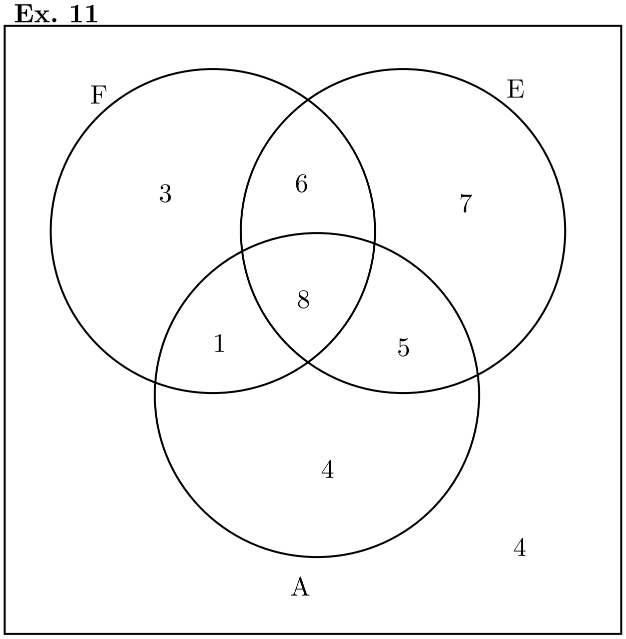
Ex. 10



Ex. 12



Ex. 11



3.3 Produit cartésien, relations et fonctions

Ex. 13

a. Pas une fonction, non définie pour $x = 1$.
b. Pas une fonction, non définie pour $x = 0$.
c. Pas une fonction, non définie pour $-1 < x < 1$.
d. C'est une fonction.
e. Pas une fonction, deux valeurs pour chaque x.
f. Pas une fonction, non définie pour $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ex. 14

a. Domaine de f : $\{a, b, c, d\}$, Portée de f : $\{1, 2, 3, 5\}$

b. Domaine de f : $-\infty, -5] \cup [-1, \infty$, Portée de f : $[0, \infty$
c. Domaine de f : $\mathbb{R} - \{0\}$, Portée de f : $\mathbb{R}$,

Ex. 15
$\{b \in B \mid \exists a \in A, (a, b) \in f\}$ ou $\{f(a) \in B \mid \exists (a, (f(a)) \in f\}$

Ex. 16

a. Bijective
b. Ni injective, ni surjective
c. injective
d. Surjective

Ex. 17

a. Ni injective, ni surjective
b. Bijective
c. Ni injective, ni surjective
d. Bijective

Ex. 18
$f(x) = 3x^2 - 6x + 4$ n'est pas une fonction surjective de $\mathbb{R}^2$
Preuve : (contre-exemple)
Le sommet de la parabole est $(1, 1)$ et la parabole est ouverte vers le haut. Donc, $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. ■

Ex. 19
$f(x) = 5x - 3$ est une fonction injective de $\mathbb{R}^2$
Preuve : (contradiction)
Supposons le contraire et que f n'est pas injective. Donc, $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$. On peut calculer :

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3 &= 5x_2 - 3 \\ 5x_1 &= 5x_2 \\ x_1 &= x_2 \lightning \end{aligned}$$

■

3.4 Quelques paradoxes

Ex. 20
En voici trois :

$$A = \{0, 1, A\}$$
$$B = \{B\}$$
$$C = \{A, B, C\}$$

LaListe = {Botte, téléphone, $14 - 13 - 21$, LaListe}

3.5 La théorie des ensembles

Ex. 21

a. Vrai
b. Vrai
c. Faux (pas d'ensemble de tous les ensembles)
d. Vrai
e. Faux (pas d'ensemble de tous les ensembles)
f. Vrai

Ex. 22

a. Auto-contenu direct, interdit par l'axiome de fondation.
b. Cycle auto-référentiel, interdit par fondation.
c. L'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes (paradoxe de Russell).
d. L'ensemble de tous les ensembles, n'existe pas en ZF.
e. ZF ne permet pas de construire des ensembles infinis descendantes de manière illimitée sans base définie.
f. Interdit par l'axiome de fondation.
g. Encore le paradoxe de Russell.
h. N'existe pas, trop grand.
i. Formellement possible, ($\mathbb{N}$) contient tous ses éléments définis ; cet ensemble est donc le vide.
j. Ensemble de tous les ensembles qui se contiennent mutuellement (cycles), interdit par fondation.

3.6 Les grands ensembles

Ex. 23

a. $\dfrac{625}{10\,000} = \dfrac{1}{16}$
b. $\dfrac{21}{100}$
c. $\dfrac{123\,456\,789}{1\,000\,000\,000}$
d. $\dfrac{55}{99} =$
e. $\dfrac{35}{99} =$
f. $\dfrac{4121}{9900}$