Chapitre 2

Technique de preuve

2.1 Preuve : les bases

Ex. 1 — Pour chacun des raisonnements suivants, déterminer la contre-vérité ou la règle d'inférence.

Addition	Syllogisme par hypothèse
Simplification	Syllogisme disjonctif
Modus ponens	Nier l'hypothèse
Modus tollens	Affirmer la conclusion

a. Tod réussit l'examen donc Tod réussit l'examen ou va dîner au fastfood.
b. Tod réussit l'examen et va dîner au fastfood, donc Tod réussi l'examen.
c. Tod réussit l'examen et va dîner au fastfood, donc Tod va dîner au fastfood.
d. Tod réussit l'examen ou va dîner au fastfood. Tod ne réussit pas l'examen donc il va dîner au fastfood.
e. Tod réussit l'examen ou va dîner au fastfood. Tod ne va pas dîner au fastfood, donc il réussit l'examen.
f. Si Tod réussit l'examen, il va dîner au fastfood. Tod réussit l'examen, donc il va dîner au fast food.
g. Si Tod réussi l'examen, il va dîner au fastfood. Tod ne va pas dîner au fastfood, donc il ne réussit pas l'examen.
h. Si Tod réussi l'examen, il va dîner au fastfood. Tod ne réussit pas l'examen, donc il ne va pas dîner au fastfood.
i. Si Tod réussi l'examen, il va dîner au fastfood. Tod va diner au fastfood, donc il réussit l'examen.
j. Si Tod réussit l'examen, il va dîner au fastfood. S'il va dîner au fastfood, il sera très heureux. Donc, si Tod réussit l'examen il sera très heureux.

Ex. 2 — Pour chacun des raisonnements suivants, déterminer la contre-vérité ou la règle d'inférence.

a. Si un étudiant fait tous les numéros alors il réussira le cours. Bill a fait tous les numéros, donc il réussira le cours.

b. Si un enseignant est monotone alors le cours est plate. Le cours de math n'est pas plate donc l'enseignant n'est pas monotone.

c. Si une personne fait attention à sa santé elle ne mange pas de fastfood. Bob ne mange pas de fastfood, donc il fait attention à sa santé.

d. Si on gagne plus d'argent, on paie plus d'impôt. Si on paie plus d'impôt, on a moins d'argent. Donc, si on a gagne plus d'argent, on a moins d'argent.

e. Si une personne est de bonne humeur, elle joue au loto. Si elle joue au loto, elle gagnera un lot. Si une personne gagne un lot, elle est de bonne humeur. Donc, une personne est de bonne humeur.

f. Un nombre $n \in \mathbb{N}$ est pair s'il peut s'exprimer comme $2k, k \in \mathbb{N}$. 8 est pair, donc $\exists k \in \mathbb{N}, 8 = 2k$. $k = 4$.

g. Un nombre $n \in \mathbb{N}$ est pair s'il peut s'exprimer comme $2k, k \in \mathbb{N}$. $7 = 2 \cdot \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \neg \in \mathbb{N}$, donc 7 est impair.

h. Si n est premier alors il se divise par 4. 9 est premier, donc il se divise par 4.

Ex. 3 — Soit les propositions suivantes :

—Il pleut ou il y a des nuages

—S'il y a des nuages, alors le sol est mouillé.

—Si le sol est est mouillé, alors il pleut.

Démontrer qu'il pleut par réfutation.

Ex. 4 — Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes et prouver le résultat.

a. Toutes les droites de la forme $Ax + By = C, \quad A, B, C \in \mathbb{N}$ sont des fonctions.

b. Tous les nombres premiers sont impairs.

c. Si un triangle a 4 côtés, alors la somme des angles de ce triangle est 180°.

d. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Q}, x \times y = 1$.

e. Si A, B sont des matrices carrées non nulle d'ordre supérieur à 2, $AB \neq BA$.

f. Le $PPCM(x, y) = x \times y$.

g. Le $PPCM(x, y) \neq x \times y$.

h. Si $n \in \mathbb{N}, n = 2x + 3$, alors $n^2 + 2n \geq 0$.

i. Aucun nombre premier n'est la somme de deux carrés.

j. Tous les nombres qui terminent par 5 sont composés.

k. Tous les nombres de la forme $n = 2^p - 1$, où p est premier, sont des nombres premiers.

l. Si x est positif et négatif, alors $x^3 - 2x^2 + 8x = 0$

2.2 Preuve directe-indirecte-contradiction

Ex. 5 — Dans les nombres entiers :

a. Démontrer que si n est pair, alors n^2 est pair.
b. Démontrer que si n^2 est pair, alors n est pair.
c. Démontrer que 99!100! est un carré parfait.
d. Si $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ alors n n'est pas un carré parfait.
e. Si un ensemble S admet une borne supérieure m alors tous les éléments de S sont inférieurs ou égal M.
f. Démontrer que la somme de deux nombres impairs est paire.
g. Soit $f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^*, b, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Si $x_1 \neq x_2$ alors $f(x_1) \neq f(x_2)$
h. Si $n \geq 1$ et n est pair alors $7n + 4$ est pair.

* **Ex. 6** — Dans les nombres entiers :

a. Démontrer que Démontrer que $3 \,|(\, n_m n_{m-1} ... n_2 n_1 n_0)_2 \leftrightarrow 3 \mid \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k=2s}}^{m} n_k - \sum_{\substack{k=1 \\ k=2s+1}}^{m} n_k \right)$.
b. Démontrer que $9 \mid n \leftrightarrow 9 \mid s, s$ la somme des chiffres qui composent n.
c. Démontrer que si $a = d \cdot q + r, 0 \leq r < |d|$, alors $PGCD(a, d) \mid a, PGCD(a, d) \mid d$ et $PGCD(a, d) \mid r$.
d. Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r}{r - 1}, r \in \mathbb{R}$

Ex. 7 — Démontrer par contradiction :

a. Démontrer que $log_2(10) \notin \mathbb{Q}, (\nexists p, q, log_2 10 = \frac{p}{q})$.
b. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'(\nexists p, q, PGCD(p, q) = 1, \sqrt{2} = \frac{p}{q})$
c. Au moins un nombre d'une suite de nombre réels est plus grand ou égal à la moyenne de cette suite.
d. Un triplet pythagoricien est un triplet (a, b, c) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$. Prouver que si (a, b, c) est un triplet pythagoricien et que $PGCD(a, b) = 1$ alors il sont tous les 3 relativement premiers.

Ex. 8 — Démontrer en traitant chaque cas :

a. Si $\nexists k \in \mathbb{N}, n = 5k$ alors $(n^2 \equiv 1 \mod 5 \vee n^2 \equiv 4 \mod 5)$.
b. Si $a, b \in \mathbb{R}, |a| + |b| \geq |a + b|$.
c. Si la somme des diviseurs de n est $n + 1$ alors n est premier.<
d. $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \mod 4 \equiv 0)$ ou $(n^2 = 1 \mod 4)$

Ex. 9 — Un triplet pythagoricien est un triplet (a, b, c) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$. Si $PGCD(a, b) = 1$, on parlera d'un triplet pythagoricien primitif.

a. Démontrer que dans un triplet pythagoricien primitif (a, b, c), a et b sont de parités différentes.
b. Démontrer que dans un triplet pythagoricien primitif (a, b, c), c est impair.

* **Ex. 10** — Démontrer la formule d'Euclide : (a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif si et seulement s'il existe $m, n \in \mathbb{N}^*, m > n, a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2, PGCD(m, n) = 1$.

2.3 Preuve d'existence

Ex. 11 — Démontrer l'existence dans les propositions suivantes.

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre qui a plus de n facteurs premiers.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un nombre premier plus grand que n.

c. Il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$.

2.4 Preuve par récurrence

Ex. 12 — Démontrer par récurrence les propositions suivantes, n un entier positif :

a. $6 \mid 2n^3 + 3n^2 + n, n \in \mathbb{N}$.

b. $3 \mid n^3 - n, n \in \mathbb{N}$.

c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

d. $5 \mid 6^n + 4$.

e. $3 \mid 5^n + 2 \cdot 11^n$.

f. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

g. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

h. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

j. On peut affranchir n'importe quel montant supérieur à 3 avec seulement des timbres de 2 cents et de 5 cents.

k. On peut affranchir n'importe quel montant supérieur à 11 avec seulement des timbres de 3 cents et de 7 cents.