Chapitre 1

La logique

1.1 Algèbre booléenne

Ex. 1 — Identifier dans les phrases suivantes les propositions et leur valeur de vérité.

a. $10_b + 11_b = 101_b$ (indice b indique un nombre en binaire)
b. $D_x = 1010$ (l'indice x indique un nombre en hexadécimal)
c. Nintendo est une entreprise multinationale japonaise fondée en 1889.
d. C'est très important.
e. Dennis Ritchie est un des pionniers de l'informatique moderne, inventeur du langage C et codéveloppeur de Unix.
f. John Von Newmann, quel génie !
g. Il est plus important d'étudier en mathématique qu'en physique.
h. Steeve Job était-il un génie ?

Ex. 2 — Soit les propositions suivantes :

L : Larry a faim.

H : Il y a 12 hot-dogs au réfrigérateur.

Écrire en langage courant les propositions suivantes :

a. $\neg L$
b. $\neg H$
c. $L \rightarrow \neg H$
d. $H \rightarrow \neg L$
e. $L \wedge H$
f. $H \vee \neg H$
g. $(L \vee H) \wedge \neg(L \wedge H)$
h. $(L \wedge \neg H) \vee (\neg L \wedge H)$

Ex. 3 — Soit les propositions suivantes :

B : Bob réussit son examen.

W : La sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* est reportée.

Écrire les phrases suivantes en utilisant **B** et **W** et les opérateurs logiques $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$

a. Bob ne réussit pas son examen.
b. Bob ne réussit pas son examen et la sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* n'est pas reportée.
c. Bob réussit son examen seulement si la sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* est reportée.
d. Bob ne réussit pas son examen ou la sortie de sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* est reportée.
e. Le report de la sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* est une condition nécessaire et suffisante pour que Bob réussisse son examen.
f. Bob ne réussit pas son examen lorsque la sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* n'est pas reportée.

g. Si Bob réussit son examen alors *Warhammer 40,000 : Darktide* sortira à temps ou pas.
h. Le report de la sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* est équivalent à la réussite de l'examen par Bob.

Ex. 4 — Soit les propositions suivantes :

B : Bruce a ses raquettes.

N : Il y a de la neige.

Écrire les phrases suivantes en utilisant **B** et **N** et les opérateurs logiques ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$)

a. S'il y a de la neige, alors Bruce a ses raquettes.
b. Il y a de la neige et Bruce a ses raquettes.
c. Il y a de la neige ou Bruce a ses raquettes.
d. Il n'arrive jamais que Bruce n'a pas ses raquettes et qu'il y ait beaucoup de neige.
e. Bruce a ses raquettes, mais il n'y pas beaucoup de neige.
f. Quand Bruce a ses raquettes, c'est qu'il y a de la neige.
g. Il est suffisant qu'il y ait de la neige pour que Bruce ait ses raquettes.
h. Bruce a ses raquettes chaque fois qu'il neige.

Ex. 5 — Dans chacun des cas suivants, selon le contexte, indiquer s'il s'agit d'une disjonction ($\vee$) ou d'une disjonction exclusive ($\oplus$).

a. Au restaurant vous devez choisir thé ou café.
b. Pour arracher un clou, il faut un marteau ou un pied-de-biche.
c. On peut payer son nouvel ordinateur en argent ou par crédit.
d. Pour faire de l'ombre, il faut planter un érable ou un chêne.
e. Pour avoir accès à internet, il faut un accès filaire ou sans-fil.
f. Un programme peut être développé en Java ou en C#.

Ex. 6 — Pour chacune des phrases suivantes, écrire la réciproque et la contraposée.

a. Si tu fais du sport, alors tu es plus en santé.
b. Il est nécessaire qu'une personne étudie pour réussir un cours de mathématique.
c. Il est suffisant d'étudier pour réussir un cours de mathématique.
d. Si le travail était une si magnifique chose, les riches en auraient gardé plus pour eux.

Ex. 7 — Construire la table de vérité des propositions suivantes :

a. $p \rightarrow (q \vee r)$
b. $(p \rightarrow q) \vee r$
c. $p \wedge (p \rightarrow q)$
d. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
e. $(q \oplus r) \leftrightarrow p$
f. $(p \leftrightarrow r) \oplus \neg q$
g. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$
h. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

1.2 Équivalence

Propriétés des opérateurs logiques

$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Identité
$p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$	Domination
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Idempotence
$\neg(\neg p)$	Double négation
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	Commutativité
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	associativité
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributivité
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv q$	Absorbotion
$p \wedge \neg p \equiv F$ $p \vee \neg p \equiv V$	Simplification

Ex. 8 — Utiliser des tables de vérité afin de vérifier que les expressions suivantes sont équivalentes.

a. $\neg (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

b. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

Ex. 9 — Identifier parmi les propositions suivantes les contradictions, les tautologies et les contingences.

a. $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

b. $p \wedge q \vee p$

c. $\neg (p \vee q) \wedge q$

d. $\neg (p \wedge q) \rightarrow \neg q$

e. $\neg (p \wedge q) \wedge \neg q$

f. $(p \vee q) \rightarrow \neg (\neg p \wedge q)$

Ex. 10 — Donner une expression de s sous forme canonique en fonction de p, q, r respectant les tables de vérité suivantes :

a.

p	q	s
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

c.

p	q	r	s
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

b.

p	q	r	s
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

d.

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

Ex. 11 — Démontrer les équivalences suivantes en utilisant les propriétés des opérateurs logiques.

a. $\neg(p \wedge q) \vee \neg(\neg q \wedge r) \Leftrightarrow V$

b. $\neg((\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)) \vee ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \Leftrightarrow p \vee (\neg q \wedge \neg r)$

c. $(p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \Leftrightarrow p \vee q$

Ex. 12 — Donner une expression de s simplifiée en fonction de p, q, r en utilisant seulement les opérateurs $\neg, \wedge, \vee$.

a.

p	q	r	s
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	F

c.

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

b.

p	q	r	s
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

d.

p	q	r	s
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

Ex. 13 — Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes en utilisant les propriétés.

a. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \;\Leftrightarrow\; p$
b. $p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \;\Leftrightarrow\; p$
c. $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee \neg q) \;\Leftrightarrow\; q \wedge \neg p$

Ex. 14 — Démontrer que non $(\neg)$ et ou $(\vee)$ forme un ensemble d'opérateurs logiques fonctionnellement complet.

1.3 Quantificateur

Ex. 15 — Écrire la négation des propositions suivantes en langage courant.

a. Tous les étudiants étudient l'examen de mathématique.
b. Aucun étudiant n'a obtenu 100%.
c. Certains étudiants réussissent l'examen de mathématique.

d. Chaque étudiant a au moins un ordinateur.
e. Il y a un langage que tous les étudiants connaissent.

Ex. 16 — Écrire les énoncés demandés à partir des deux fonctions propositionnelles suivantes :
—$E(x)$: x est un étudiant d'info.
—$G(x)$: x est un gamer.

a. Il y a des étudiants d'info qui sont des gamers.
b. Tous les étudiants d'info sont des gamers.
c. Seuls les étudiants d'info sont des gamers.
d. Aucun étudiant d'info n'est un gamer.
e. Tout le monde est un gamer et un étudiant d'info.
f. Les gens sont étudiants d'info ou gamer.

Ex. 17 — Soit la fonction propositionnelle $A(x, y)$: x aime y. Exprimer les énoncés suivants à l'aide des quantificateurs.

a. Tout le monde aime Chris.
b. Tout le monde aime quelqu'un.
c. Il y a quelqu'un que tout le monde aime.
d. Personne n'aime tout le monde.
e. Il y a quelqu'un que personne n'aime.
f. Chaque personne s'aime.
* g. Il y a exactement une personne que tout le monde aime.
* h. Il y a exactement deux personnes qui aiment Chris.
* i. Il y a une personne qui n'aime qu'elle-même.

Ex. 18 — Lewis Caroll (Charles Lutwidge Dodgson), un professeur de Christ Church, écrivit sous le nom de plume Lewis Caroll
les romans « Les Aventures d'Alice au pays des merveilles » (1865) et sa suite : « De l'autre côté du miroir » (1871). Mais il écrivit également des manuels scolaires sur la logique. Dans l'un d'eux, il présente les problèmes suivants :

a. (problème #12) Dans une savane remplie d'animaux divers, soit les propositions suivantes :
   - Tous les lions sont féroces.
   - Certains lions ne boivent pas de café.
   - Certaines créatures qui boivent du café ne sont pas féroces.

   Soit les fonctions propositionnelles suivantes :
   - $L(x)$: x est un lion.
   - $F(x)$: x est féroce.
   - $C(x)$: x boit du café.

   Exprimer les trois propositions en utilisant ces fonctions propositionnelles.
b. Soit les propositions suivantes :
   - Tous les petits oiseaux ont des couleurs vives.
   - Aucun gros oiseau ne mange de miel.
   - Les oiseaux qui ne mangent pas de miel ont des couleurs fades.

   Soit les fonctions propositionnelles suivantes :
   - $P(x)$: x est un petit oiseau.
   - $M(x)$: x mange du miel.
   - $V(x)$: x a des couleurs vives.

   Exprimer les trois propositions en utilisant ces fonctions propositionnelles.

Ex. 19 — Pour chacun des exemples suivants, déterminer la valeur de vérité de $\forall x \forall y$, $\forall x \exists y$, $\exists x \forall y$ et $\exists x \exists y$

- $x + y = 4$
- $x - y = 4$
- $xy = yx$
- $x + y = y$
- $(x + 3)(y - 2) = 0$
- $x^2 + y^2 + 1 = 0$