La diagonalisation

Pourquoi diagonaliser

Il est intéressant de construire une matrice diagonale D à partir d'une matrice A respectant l'égalité $D = P^{-1}AP$, où P est une matrice inversible. En effet, si on sait construire une telle matrice, il est alors possible de calculer plus rapidement $A^k, k \in \Re$.

Soit $A, P, D,$ 3 matrices telles que $D = P^{-1}AP$. On déduit que :

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ PD &= PP^{-1}AP \\ PD &= I_nAP \\ PDP^{-1} &= APP^{-1} \\ PDP^{-1} &= AI_n \\ PDP^{-1} &= A \end{aligned}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A^k &= \left(PDP^{-1}\right)^k \\ &= \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)...\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) \\ &= PD\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)D...\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} \\ &= PI_{n\times n}DI_{n\times n}...I_{n\times n}DP^{-1} \\ &= PD^kP^{-1} \\ &\blacksquare \end{aligned}$$

Calculer D^k revient à élever à la k les éléments de la diagonale de D. Ensuite, il suffit d'effectuer les deux multiplications à gauche et à droite et c'est terminé.

Le principe de la diagonalisation

Diagonaliser une matrice $A_{n\times n}$ revient à trouver la *matrice de passage* $P_{n\times n}$ telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \left[d_{ij}\right]_{n\times n}, d_{ij} = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$. On a :

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= A \\ PD &= AP \end{aligned}$$

Analysons la matrice PD. C'est en fait la matrice P dans laquelle on a multiplié les éléments de la j^{me} colonne par l'élément λ_j. Nommons P_j la matrice colonne qui présente les éléments de la j^{me} colonne de P. On obtient ainsi à résoudre le système :

$$\begin{aligned} \lambda_jP_j &= AP_j \\ 0_{n\times 1} &= AP_j - \lambda_jP_j \\ 0_{n\times 1} &= (A - \lambda_jI_{n\times n})P_j \end{aligned}$$

Ce système compte au moins une solution pour P_j, soit la solution trivial $(P_j = 0_{n \times 1})$, qui ne nous intéresse pas puisque P doit être inversible. Pour trouver une solution intéressante, il faut donc que le système ait d'autres solutions (une infinité en fait). On veut donc que $det\,(A - \lambda_j I_{n \times n}) = 0$.

Quelques définitions

- *Polynôme caractéristique* : le polynôme caractéristique de la matrice A est obtenu en calculant $det\,(A - \lambda_j I_{n \times n}) = 0$

- *Valeurs propres* de A : les valeurs propres d'une matrice A sont les racines du polynôme caractéristique de A. Les valeurs propres sont les valeurs des λ_j de la diagonale de la matrice D.

- Vecteur propre : Un vecteur X qui vérifie l'équation $AX = \lambda X$, c'est à dire que $(A - \lambda I_n)X = 0_{n \times n}$, est appelé un *vecteur propre* associé à la valeur propre λ.

- Matrice de passage : La matrice P est composée, en colonne, des vecteurs propres trouvés pour les valeurs propres. Ces vecteurs propres doivent être linéairement indépendant.

Un exemple

Soit la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

1. Calculons le polynôme caractéristique :
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 \\ &= -2 + \lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 6 \\ &= (\lambda + 3)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

2. Les valeurs propres sont donc -3 et 2.

3. Trouvons des vecteurs propres. Pour $\lambda = -3$ on a :

$$\begin{bmatrix} 1+3 & 2 \\ 2 & -2+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} L_2 - \frac{1}{2} \times L_1$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4x + 2k = 0$$

$$4x = -2k$$

$$x = -\frac{k}{2}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{-k}{2} & k \end{bmatrix}$$

$$\text{disons } k = 2, \text{ on obtient}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pour $\lambda = 2$ on a :

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 2 \\ 2 & -2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} L_2 - 2 \times L_1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x + 2k = 0$$

$$x = 2k$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2k & k \end{bmatrix}$$

$$\text{disons } k = 1, \text{ on obtient}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Nous avons trouvé $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. On peut compter $P^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

6. Vérifions notre réponse, on devrait arriver à $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
D &= P^{-1}AP \\
&= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \\
&= \left(-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix}15 & 0\\ 0 & -10\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

7. Calculons A^5.

$$
\begin{aligned}
A^5 &= \left(PDP^{-1}\right)^5 \\
&= PD^5P^{-1} \\
&= \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^5\left(-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-243 & 0\\ 0 & 32\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix} \\
&= \frac{-1}{5}\begin{bmatrix}243 & -64\\ -486 & 32\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix}115 & 550\\ 550 & 940\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}-23 & 110\\ 110 & -188\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

8. Vérifions avec les produits traditionnels :

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{bmatrix} \\
A^2A^2 &= \begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}29 & -26\\ -26 & 68\end{bmatrix} \\
AA^4 &= \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}29 & -26\\ -26 & 68\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-23 & 110\\ 110 & -188\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$