Préparation à l'examen 2 – 8ALG135 – Algèbre linéaire

1) Soit les matrices suivantes $A=\begin{bmatrix}1&2&0&0&1&0\\2&3&0&0&0&1\\0&0&1&0&3&1\\0&0&0&1&-2&4\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&2&0&0\\2&3&0&0\end{bmatrix}$.

   Calculer AB et BA par bloc de 2×2.

2) Inverser la matrice $A=\begin{bmatrix}1&3&1&0&0&0\\1&2&0&1&0&0\\0&0&1&3&1&0\\0&0&1&2&0&1\\0&0&0&0&1&3\\0&0&0&0&1&2\end{bmatrix}$ en utilisant des blocs.

3) Déterminer une factorisation LU de $A=\begin{bmatrix}1&3&4&-2&1\\1&2&3&2&3\\3&4&3&-3&4\\1&1&-2&-4&1\end{bmatrix}$.

4) Résoudre le système $\begin{aligned}a+b+2c+3d&=4\\a+b+2c+2d&=5\\a+b+c-2d&=5\\4a+3b+c+d&=2\end{aligned}$ en utilisant une factorisation LU.

5) Déterminer une base pour le noyau et une autre pour l'image de la matrice $A=\begin{bmatrix}-4&4&-2&8&-2\\3&-4&2&2&3\\-4&4&-2&2&-2\\4&-2&1&-3&2\end{bmatrix}$.

Réponses examen 2 – 8ALG135

:

1) J'ai utilisé un abus de notation ici en mettant des matrices dans une matrice…

$$AB=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&9\\6&8\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$=\begin{bmatrix}2&4&0&0\\4&6&0&0\\5&9&1&0\\6&8&0&1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1\\-2&4\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}5&8\\8&13\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&0&0&1&0\\2&3&0&0&0&1\\0&0&1&0&3&1\\0&0&0&1&-2&4\\5&8&0&0&1&2\\8&13&0&0&2&3\end{bmatrix}$$

2) On peut couper A comme ceci : $A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$ avec :

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\quad B=A_{22}=\begin{bmatrix}1&3&1&0\\1&2&0&1\\0&0&1&3\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

On inverse en suite B :

$$A_{22}^{-1}=B^{-1}=\begin{bmatrix}B_{11}^{-1}&B_{11}^{-1}B_{12}B_{22}^{-1}\\0_{22}&B_{22}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&3&-7&9\\1&-1&3&-4\\0&0&-2&3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}.$$

Et Finalement, on finit avec A^{-1} :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1}&-A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1}\\0_{4\times2}&B^{-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&3&-7&9&-23&30\\1&-1&3&-4&10&-13\\0&0&-2&3&-7&9\\0&0&1&-1&3&-4\\0&0&0&0&-2&3\\0&0&0&0&1&-1\end{bmatrix}=$$

3) $$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\3&5&1&0\\1&2&1&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1&3&4&-2&1\\0&-1&-1&4&2\\0&0&-4&-17&-9\\0&0&0&7&5\end{bmatrix}$$

4) $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -7 & -11 \end{bmatrix}$, il faut donc permuter les lignes 2 et 4.

On obtient :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, PB = B' = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

On a à résoudre :

$$Ax = B$$
$$PAx = PB$$
$$\underline{PLUx = B'}$$
$$PLy = B' \quad .$$
$$Ux = y$$

On obtient pour y :

$$y_1 = 4$$
$$y_2 = 2 - 4(4) = -14$$
$$y_3 = 5 - 4 = 1$$
$$y_4 = 5 - 4 = 1$$

Et finalement pour x :

$$-d = 1$$
$$\underline{d = -1}$$
$$-c - 5(-1) = 1$$
$$-c = -4$$
$$\underline{c = 4}$$

$$-b - 7(4) - 11(-1) = -14$$
$$-b - 28 + 11 = -14$$
$$-b = 3$$
$$\underline{b = -3}$$
$$a - 3 + 2(4) + 3(-1) = 4$$
$$a - 3 + 8 - 3 = 4$$
$$\underline{a = 2}$$

, soit $x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

5)

On a : $A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 & 8 & -2 \\ 3 & -4 & 2 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Et la solution est :

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_3}{2} \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, donc le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est une base de $\ker A$.

Puisque les colonnes 1, 2, 4 et 5 sont des colonnes de pivots, les vecteurs colonnes correspondants de A forment un système générateurs libre de l'image de A. Donc,

$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ forme une base de $\operatorname{Im} A$.